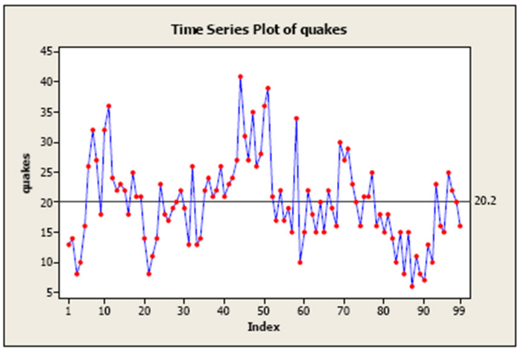
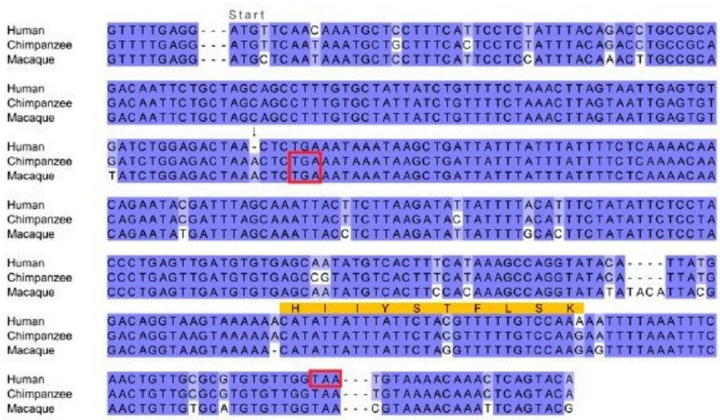
DECSAI
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada

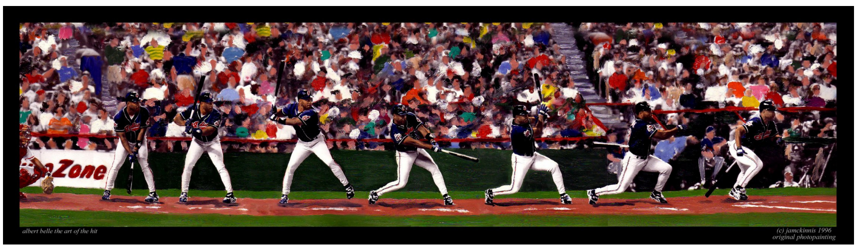
Series temporales

© Fernando Berzal, berzal@acm.org

Datos secuenciales







Series temporales

- Características de las series temporales
- Visualización de series temporales
- Preprocesamiento
- Filtrado de series temporales
  - Medias móviles
  - Suavizado exponencial
- Técnicas de regresión
  - Regresión lineal
  - Coeficiente de correlación de Pearson
- Función de autocorrelación
- Caso práctico: Una sesión de análisis

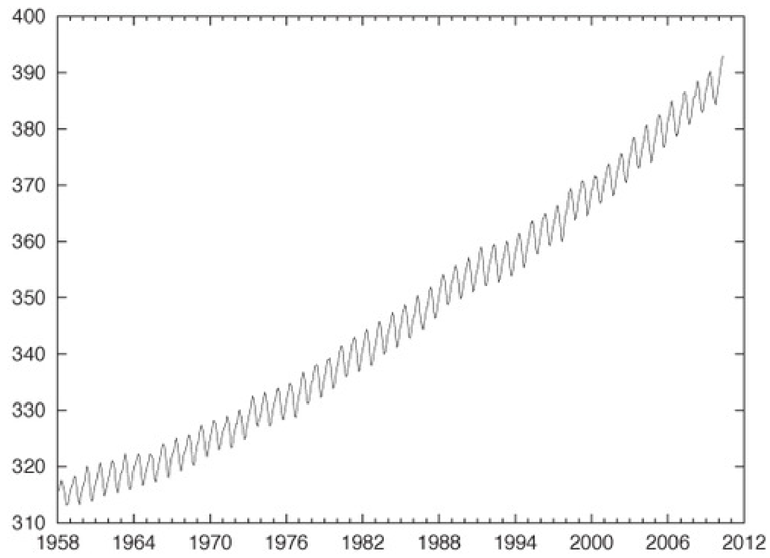
Series temporales

Características

- Tendencias
- Estacionalidad (comportamientos periódicos)
- Ruido
- Otros, p.ej. cambios bruscos de comportamiento

Ejemplos

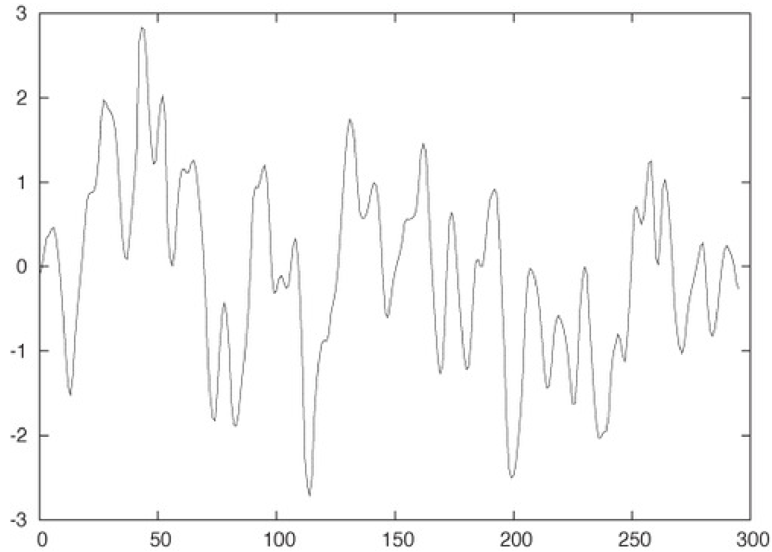
Tendencia y estacionalidad



Concentración de CO_2
medida en el observatorio de Mauna Loa, Hawaii.

Ejemplos

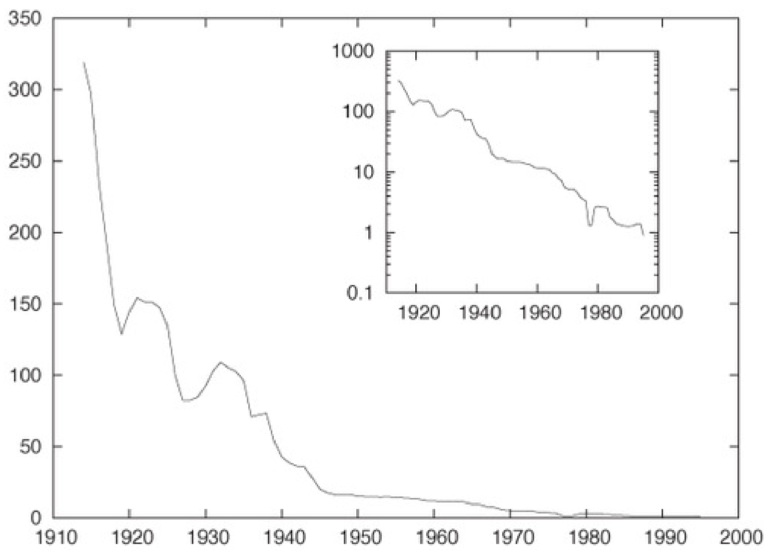
Variación "suave" pero sin tendencia a largo plazo



Concentración de gas a la salida de una caldera

Ejemplos

Tendencia no lineal



Coste de llamadas telefónicas de larga distancia (USA)

Ejemplos

Cambios "bruscos" de comportamiento

Índice Nikkei (Bolsa de Tokyo)

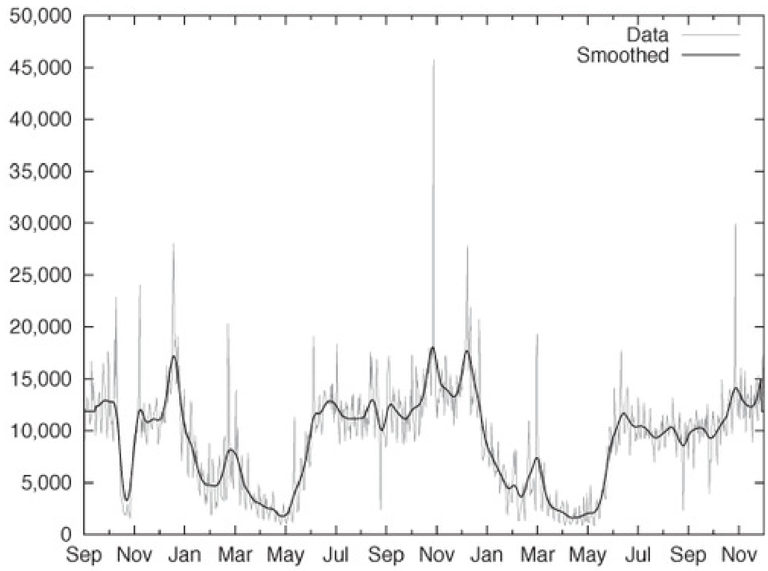
Ejemplos

Conjuntos de datos reales…

Estacionalidad a corto y largo plazo,

posibles cambios de comportamiento

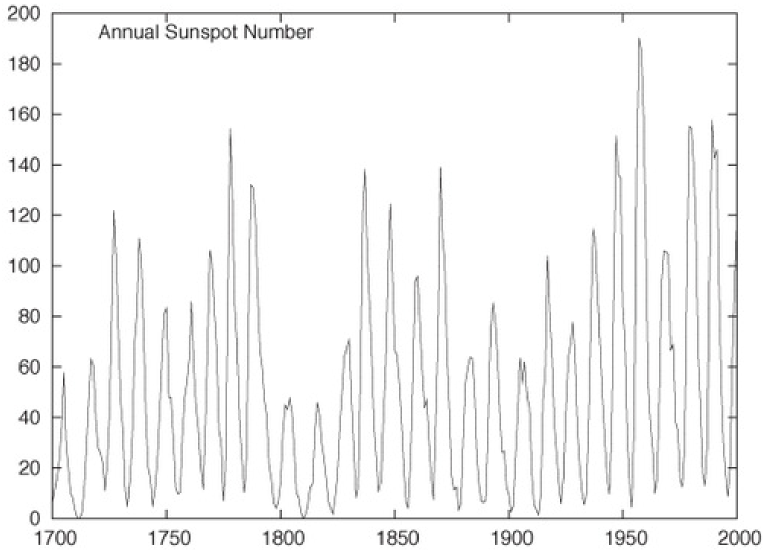
y ruido



Llamadas diarias

a un call-center

Visualización



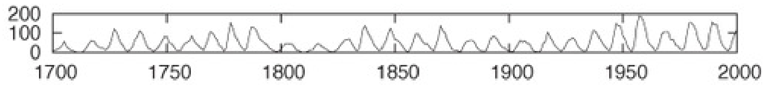
Número anual de manchas solares durante 300 años

Una relación de aspecto incorrecta
hace difícil reconocer los detalles de cada ciclo.

Visualización

Banking [Banking to 45 degrees]

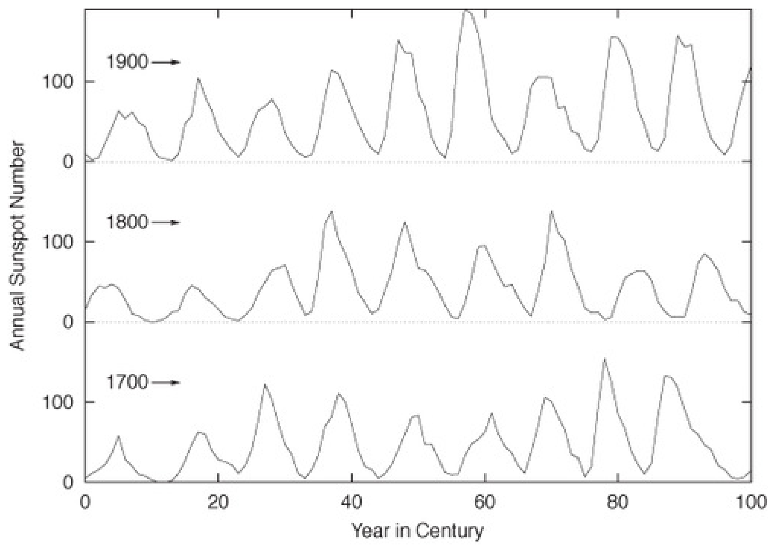
Los cambios casi verticales de la figura anterior nos cuesta trabajo apreciarlos. Sin embargo, reconocemos mejor los cambios en una serie cuando se dibujan con un ángulo de 45º:



Ahora podemos apreciar que las "subidas" son más rápidas que las bajadas, aunque la figura es tan pequeña que apenas se pueden analizar detalles…

Visualización

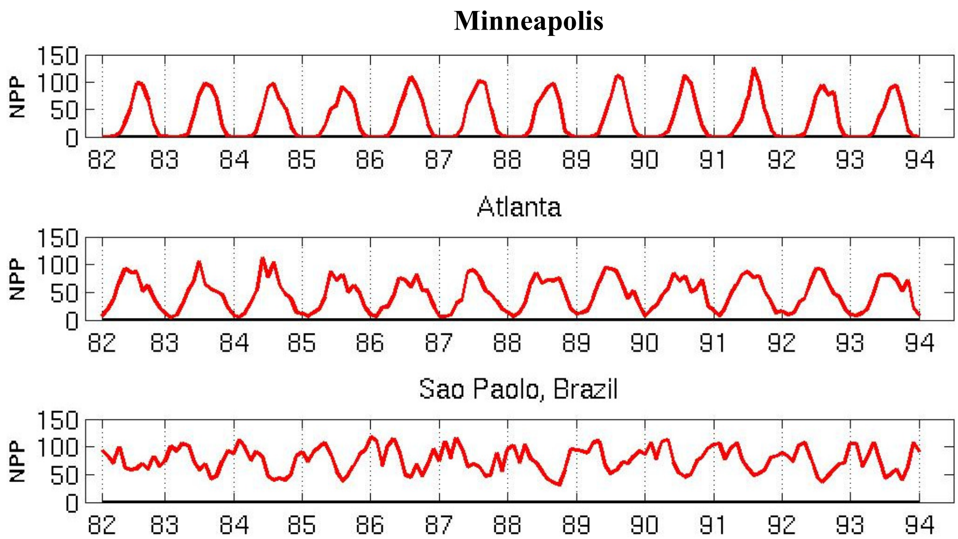
Stacking



Dividiendo el eje temporal en 3 fragmentos, mantenemos el "banking" y generamos un gráfico con unas dimensiones más razonables (p.ej. 4:3).

Preprocesamiento

Datos originales

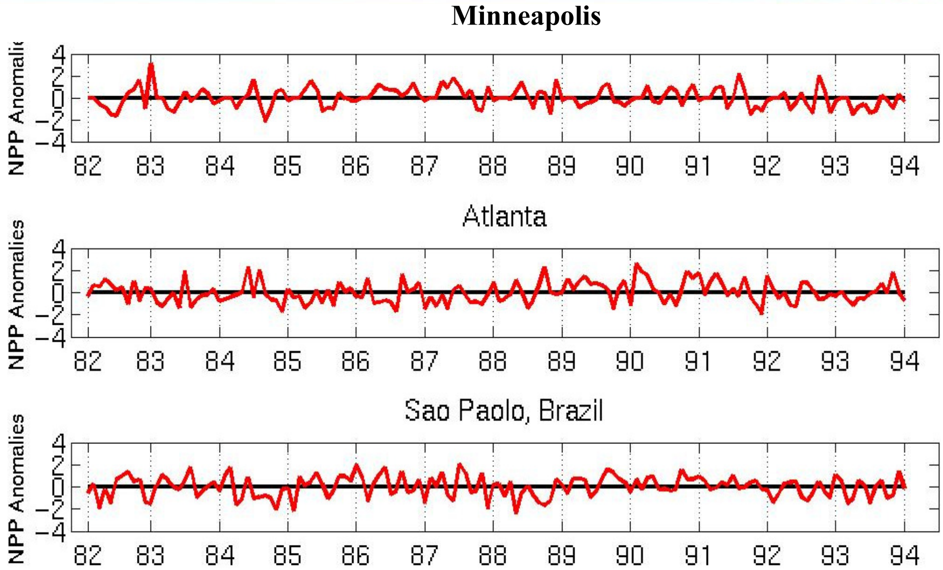


Correlación entre las series temporales

	Minneapolis	Atlanta	Sao Paolo
Minneapolis	1.0000	0.7591	-0.7581
Atlanta	0.7591	1.0000	-0.5739
Sao Paolo	-0.7581	-0.5739	1.0000

Preprocesamiento

Normalización
z-score
mensual



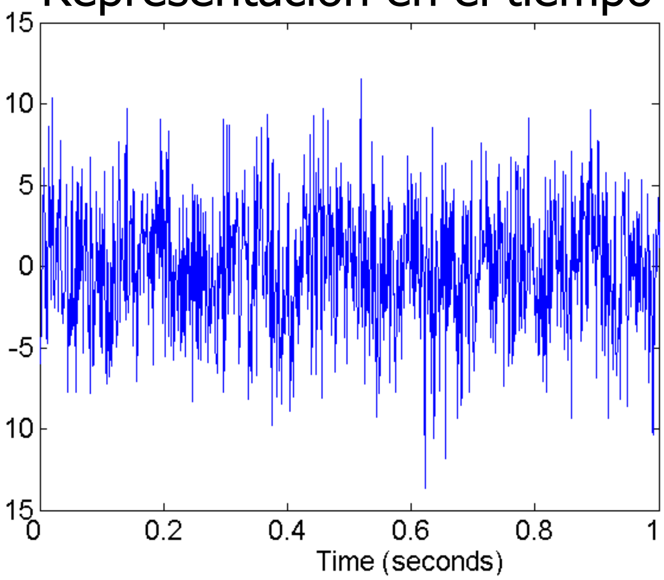
Correlación entre las series temporales estacionalizadas

	Minneapolis	Atlanta	Sao Paolo
Minneapolis	1.0000	0.0492	0.0906
Atlanta	0.0492	1.0000	-0.0154
Sao Paolo	0.0906	-0.0154	1.0000

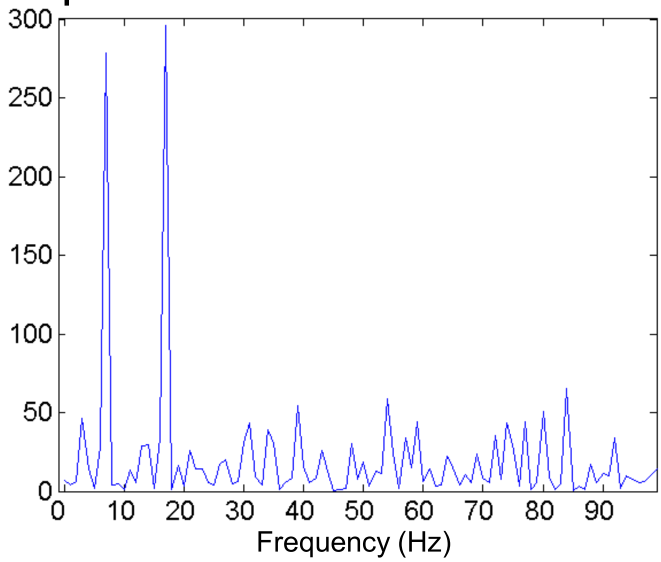
Preprocesamiento

Transformada de Fourier

Representación en el tiempo



Representación en frecuencia



Filtrado de series temporales

Medias móviles [moving averages]

IDEA: Reemplazar el punto central de una serie de un número impar de números consecutivos por su media aritmética (filtro "paso bajo").

$$s_i = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^{k} x_{i+j}$$

Filtrado de series temporales

Medias móviles [moving averages]

PROBLEMA: La presencia de un pico en la ventana [i-k, i+k] distorsiona la media móvil.

POSIBLE SOLUCIÓN: Utilización de pesos (menores en los extremos de la ventana).

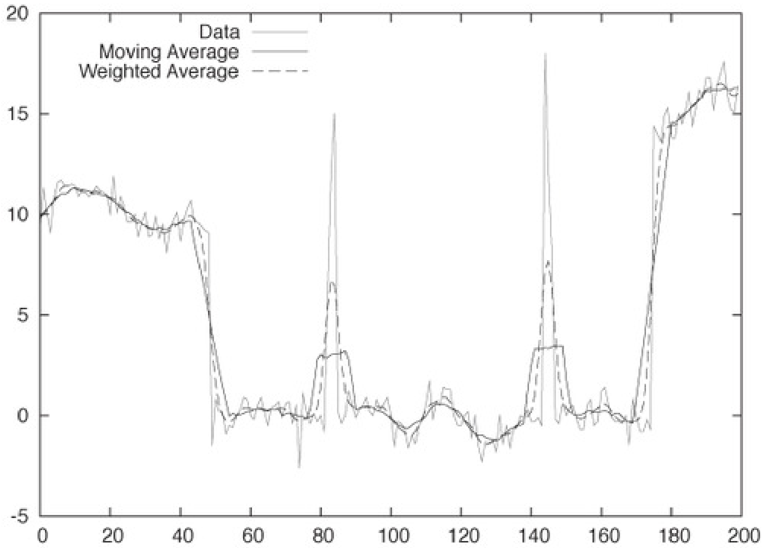
$$s_i = \sum_{j=-k}^{k} w_j x_{i+j} \quad donde \quad \sum_{j=-k}^{k} w_j = 1$$

Ejemplos: Gaussiana, ventana de Hamming…

http://en.wikipedia.org/wiki/Window_function#Hann_window

Filtrado de series temporales

Medias móviles [moving averages]



k=5

Filtrado de series temporales

Medias móviles [moving averages]

Limitaciones de las medias móviles:

- "Costosas" de calcular: Cuando se utilizan pesos, el cálculo hay que hacerlo desde cero para cada valor.
- Problemáticas en los extremos de las series de datos (dada la anchura de la ventana, no se pueden extender hasta el final de la serie, que suele ser lo más interesante).
- No se pueden definir fuera de la serie temporal, por lo que no se pueden utilizar para realizar predicciones.

Suavizado exponencial [exponential smoothing]

Proporciona un filtrado fácil de calcular, además evita los problemas de las medias móviles:

- **Suavizado exponencial simple** (para series sin tendencia ni estacionalidad).
- **Suavizado exponencial doble** (para series con tendencia pero no estacionalidad).
- **Suavizado exponencial triple** (para series con tendencia y estacionalidad).

Suavizado exponencial simple

$$s_i = \alpha x_i + (1-\alpha) s_{i-1}$$

Los distintos métodos de suavizado exponencial actualizan el resultado del anterior valor con el último dato de la serie original (combinando la información ya disponible con la aportada por el nuevo dato mediante un parámetro, $0<\alpha<1$).

Filtrado de series temporales

Suavizado exponencial simple

¿Por qué se llama suavizado exponencial?

Si expandimos la recurrencia, obtenemos:

$$s_i = \alpha \sum_{j=0}^{i} (1-\alpha)^j x_{i-j}$$

Todas las observaciones previas contribuyen al valor suavizado, pero su contribución se suprime por el exponente creciente del parámetro α.

Filtrado de series temporales

Suavizado exponencial simple

"Uso" en predicción: Si extendemos el suavizado más allá del final de los datos disponibles, la predicción es extremadamente simple :-(

$$x_{i+h} = s_i$$

Ante la presencia de tendencias, la señal suavizada tiene ir retrasada con respecto a los datos originales salvo que utilicemos un valor de α cercano a 1.

Filtrado de series temporales

Suavizado exponencial doble

$$s_i = \alpha x_i + (1-\alpha)(s_{i-1} + t_{i-1})$$
$$t_i = \beta(s_i - s_{i-1}) + (1-\beta)t_{i-1}$$

El suavizado exponencial doble retiene información acerca de la tendencia: la señal suavizada s_i y la tendencia suavizada t_i.

El parámetro β se utiliza para realizar un suavizado exponencial sobre la tendencia.

Filtrado de series temporales

Suavizado exponencial doble

"Uso" en predicción:

Si extendemos el suavizado más allá del final de los datos disponibles, la predicción es la siguiente:

$$x_{i+h} = s_i + ht_i$$

Filtrado de series temporales

Suavizado exponencial triple

(a.k.a. método de Holt-Winters)

Una tercera cantidad se utiliza para describir la estacionalidad, que puede ser aditiva o multiplicativa según nos interese.

NOTA:

p_i modela el componente periódico de la señal, donde k es el período observado.

Filtrado de series temporales

Suavizado exponencial triple

(a.k.a. método de Holt-Winters)

ESTACIONALIDAD ADITIVA

$$s_i = \alpha(x_i - p_{i-k}) + (1-\alpha)(s_{i-1} + t_{i-1})$$

$$t_i = \beta(s_i - s_{i-1}) + (1-\beta)t_{i-1}$$

$$p_i = \gamma(x_i - s_i) + (1-\gamma)p_{i-k}$$

$$x_{i+h} = s_i + ht_i + p_{i-k+h}$$

Filtrado de series temporales

Suavizado exponencial triple

(a.k.a. método de Holt-Winters)

ESTACIONALIDAD MULTIPLICATIVA

$$s_i = \alpha \frac{x_i}{p_{i-k}} + (1-\alpha)(s_{i-1} + t_{i-1})$$

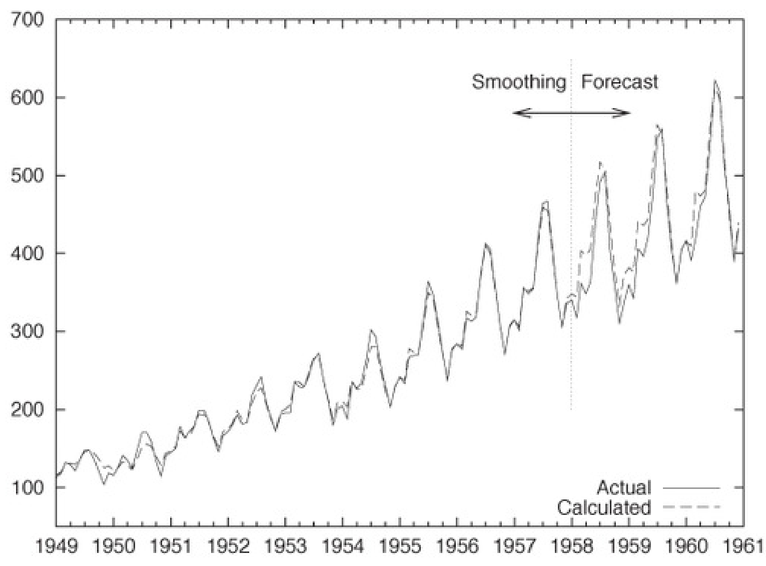
$$t_i = \beta(s_i - s_{i-1}) + (1-\beta)t_{i-1}$$

$$p_i = \gamma \frac{x_i}{s_i} + (1-\gamma)p_{i-k}$$

$$x_{i+h} = (s_i + ht_i)p_{i-k+h}$$

Filtrado de series temporales

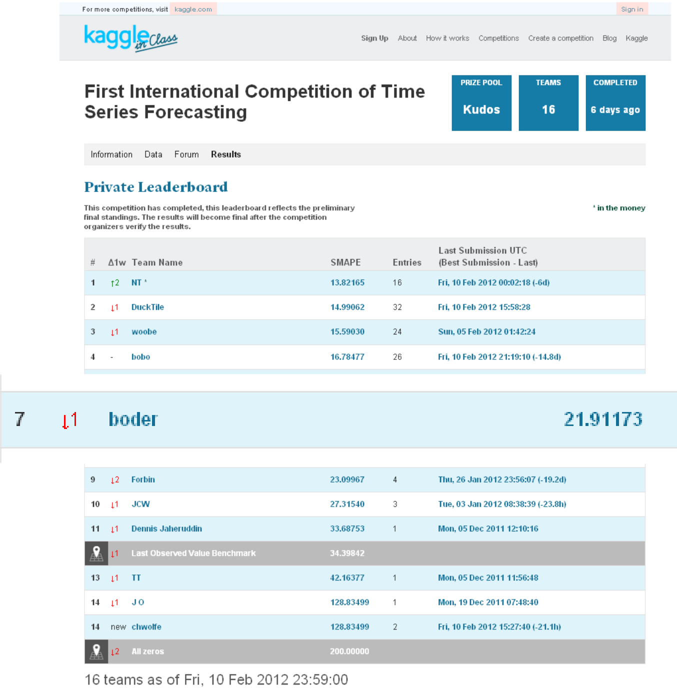
Suavizado exponencial [exponential smoothing]



Número mensual de pasajeros (en miles).

Filtrado de series temporales

Suavizado exponencial [exponential smoothing]



For more competitions, visit kaggle.com — Sign in

kaggle in Class — Sign Up · About · How it works · Competitions · Create a competition · Blog · Kaggle

First International Competition of Time Series Forecasting

PRIZE POOL: Kudos — TEAMS: 16 — COMPLETED: 6 days ago

Information · Data · Forum · **Results**

Private Leaderboard

This competition has completed, this leaderboard reflects the preliminary final standings. The results will become final after the competition organizers verify the results.

* in the money

#	Δ1w	Team Name	SMAPE	Entries	Last Submission UTC (Best Submission - Last)
1	↑2	NT *	13.82165	16	Fri, 10 Feb 2012 00:02:18 (-6d)
2	↓1	DuckTile	14.99062	32	Fri, 10 Feb 2012 15:58:28
3	↓1	woobe	15.59030	24	Sun, 05 Feb 2012 01:42:24
4	-	bobo	16.78477	26	Fri, 10 Feb 2012 21:19:10 (-14.8d)
7	↓1	boder	21.91173		
9	↓2	Forbin	23.09967	4	Thu, 26 Jan 2012 23:56:07 (-19.2d)
10	↓1	JCW	27.31540	3	Tue, 03 Jan 2012 08:38:39 (-23.8h)
11	↓1	Dennis Jaheruddin	33.68753	1	Mon, 05 Dec 2011 12:10:16
	↓1	Last Observed Value Benchmark	34.39842		
13	↓1	TT	42.16377	1	Mon, 05 Dec 2011 11:56:48
14	↓1	J O	128.83499	1	Mon, 19 Dec 2011 07:48:40
14	new	chwolfe	128.83499	2	Fri, 10 Feb 2012 15:27:40 (-21.1h)
	↓2	All zeros	200.00000		

16 teams as of Fri, 10 Feb 2012 23:59:00

Sólo ajustando 3 parámetros se obtiene un "buen" modelo…

7º puesto

International Competition on Time Series Forecasting ICTSF'2012

SMAPE = 21.91
vs. 13.82 (ganador)
vs. 34.40 (benchmark)

Técnicas de regresión

La predicción (numérica) es…

- Similar a la clasificación:
  - Se construye un modelo a partir de un conjunto de entrenamiento.
  - Se utiliza el modelo para predecir el valor de una variable (continua u ordenada).
- Diferente a la clasificación:
  - El modelo define una función continua.

Método más empleado: **Regresión**

Técnicas de regresión

Las técnicas de regresión modelan la relación entre una o más variables independiente (predictores) y una variable dependiente (variable de respuesta).

Métodos de regresión

- Regresión lineal
- Regresión no lineal
- Árboles de regresión (p.ej. CART)
- …

Técnicas de regresión

Regresión lineal simple

Una única variable independiente:

$$y = w_0 + w_1 x$$

donde w_0 (desplazamiento) y w_1 (pendiente) son los coeficientes de regresión.

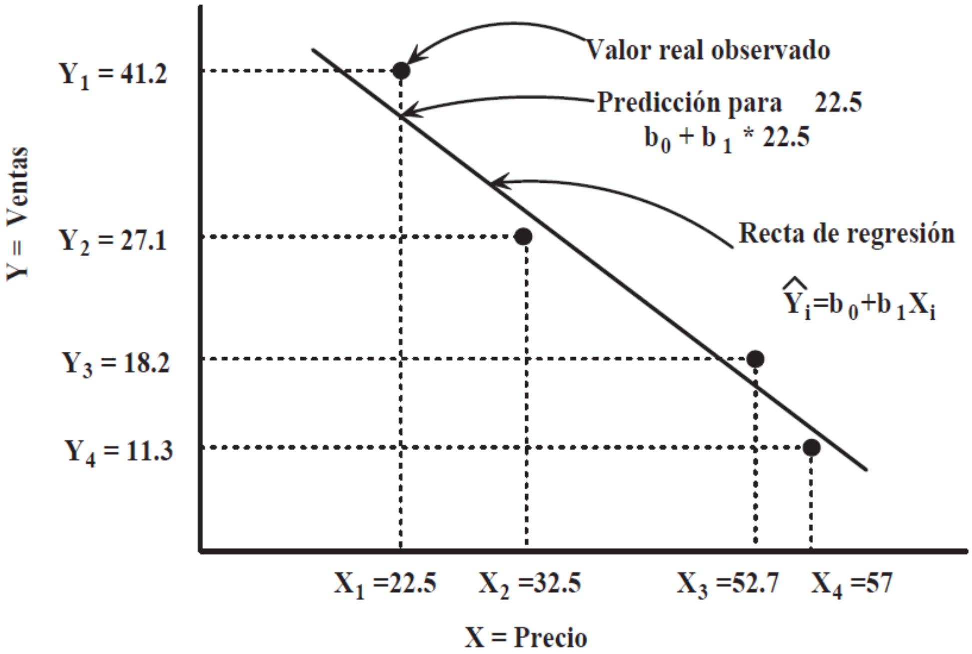
- **Método de los mínimos cuadrados** (estima la línea recta que mejor se ajusta a los datos):

$$w_0 = \bar{y} - w_1 \bar{x} \qquad w_1 = \frac{\sum_{i=1}^{|D|} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{|D|} (x_i - \bar{x})^2}$$

Técnicas de regresión

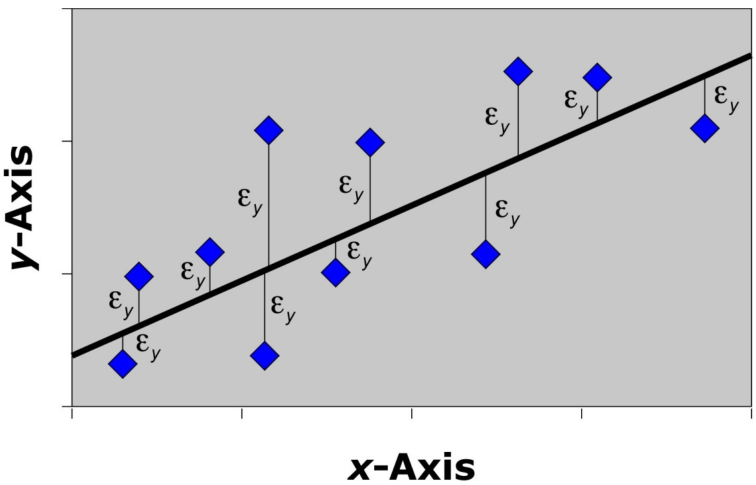
Regresión lineal simple

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 X_i$$



Técnicas de regresión

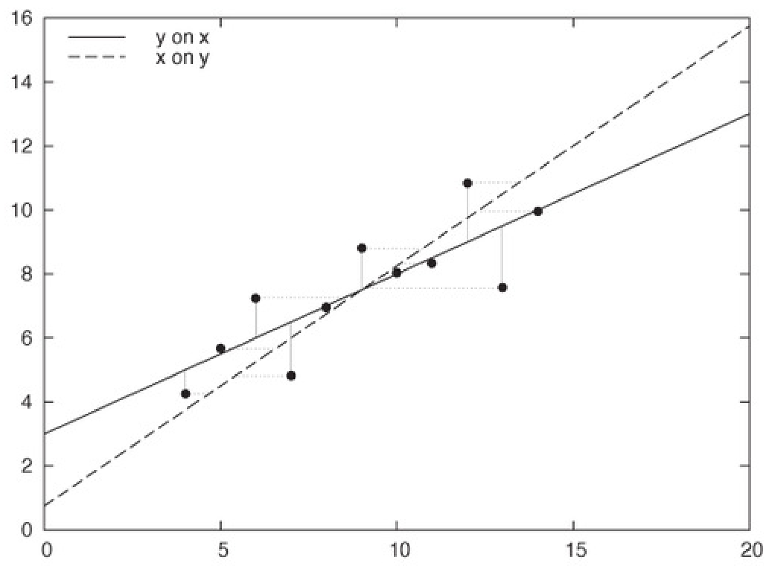
Regresión lineal simple



El método de los mínimos cuadrados minimiza la suma de los cuadrados de los residuos ε_i (las diferencias entre las predicciones y los valores observados).

Técnicas de regresión

Regresión lineal simple



¡OJO! Al utilizar regresión lineal, la recta y=f(x) que se obtiene es distinta a la que obtenemos si x=f(y).

Técnicas de regresión

Regresión lineal múltiple

Varias variables independientes:

$$y = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots$$

- Resoluble por métodos numéricos de optimización.
- Muchas funciones no lineales pueden transformarse en una expresión lineal.

p.ej. Un modelo de regresión polinomial
$y = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + w_3 x^3$
puede transformarse en un modelo lineal definiendo las variables $x_2 = x^2$, $x_3 = x^3$:
$y = w_0 + w_1 x + w_2 x_2 + w_3 x_3$

Técnicas de regresión

Regresión lineal

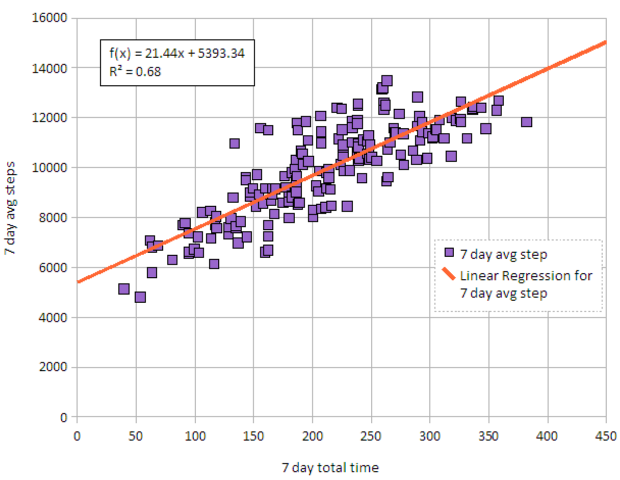
Condiciones necesarias para aplicar regresión lineal:

- Obviamente, la muestra ha de ser aleatoria.
- El tipo de dependencia descrita ha de ser lineal.
- Fijado un valor de la(s) variable(s) independiente(s), la variable dependiente se distribuye según una distribución normal.
- Los errores han de tener la misma varianza (nube de puntos homogénea).

Técnicas de regresión

Regresión lineal simple

1. Mediante un diagrama de dispersión, comprobamos visualmente si existe una relación lineal entre las variables X (predictor) e Y (respuesta):



Técnicas de regresión

Regresión lineal simple

2. Cuantificamos la relación construyendo la recta que resume la dependencia y damos una medida de cómo se ajusta la recta a los datos (correlación):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}} \in [-1, 1]$$

Técnicas de regresión

Coeficiente de correlación

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}} \in [-1, 1]$$

r=+1 Dependencia lineal total en sentido positivo (cuanto mayor es X, mayor es Y).

r=-1 Dependencia lineal total en sentido negativo (cuanto mayor es X, menor es Y).

Técnicas de regresión

Coeficiente de correlación

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}} \in [-1, 1]$$

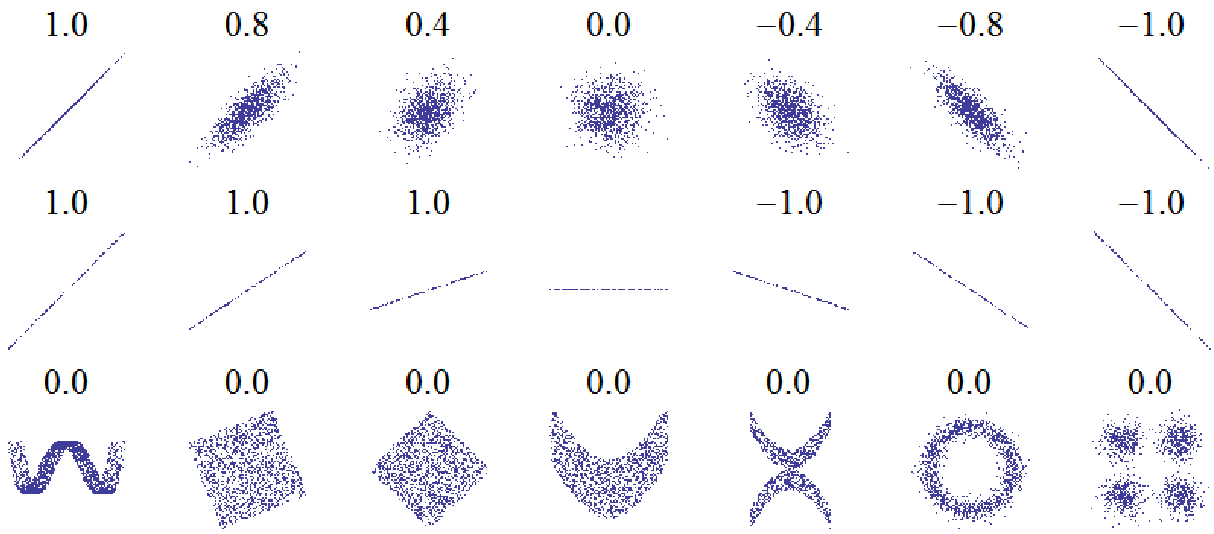
r > 0 Existe una dependencia positiva.
Cuanto más se acerque a 1, mayor es ésta.

r < 0 Existe una dependencia negativa.
Cuanto más se acerque a -1, mayor será.

r = 0 No podemos afirmar nada.

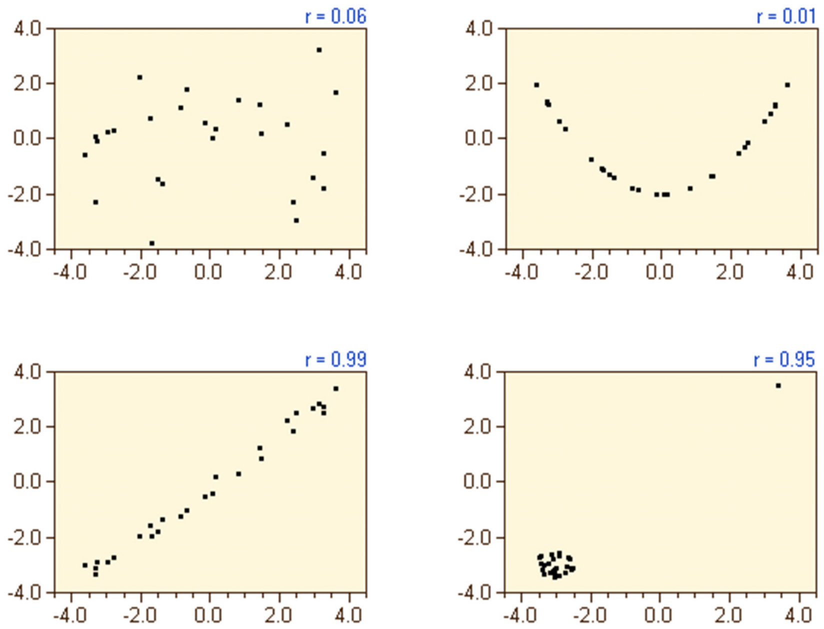
Técnicas de regresión

Coeficiente de correlación



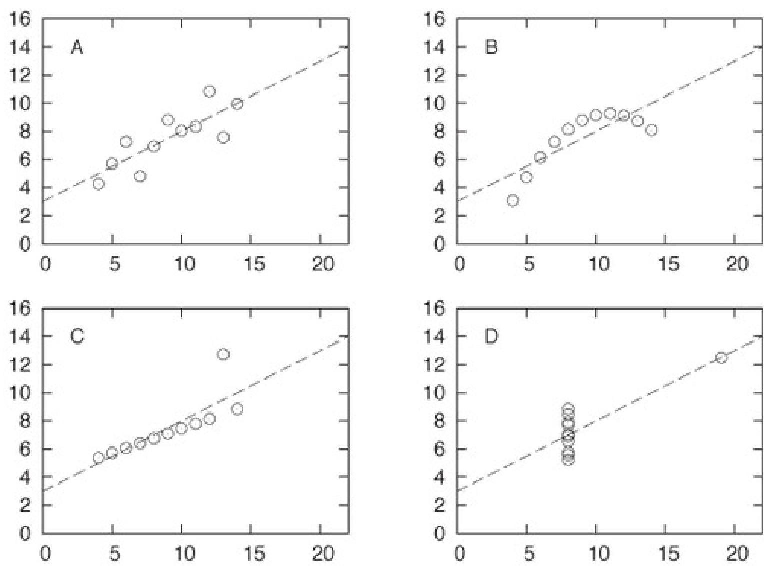
Técnicas de regresión

Coeficiente de correlación



Técnicas de regresión

Coeficiente de correlación



El cuarteto de Anscombe

(4 conjuntos de datos con el mismo coeficiente de correlación)

Técnicas de regresión

Coeficiente de correlación

Ventaja de r

- No depende de las unidades usadas en la medición.

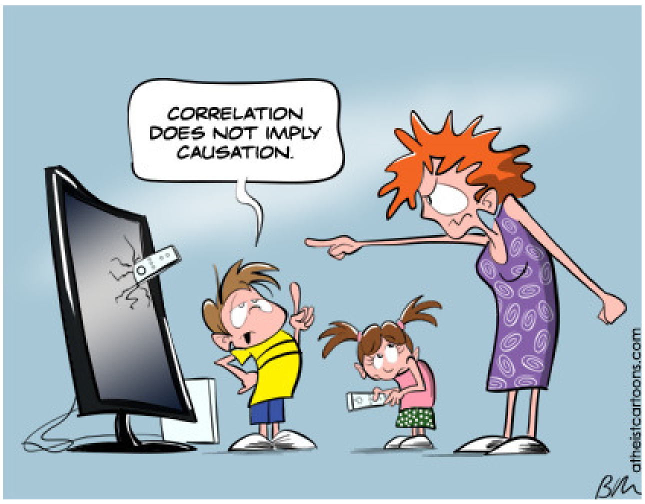
Limitaciones de r

- Sólo mide dependencia lineal entre las variables.

¡OJO! La correlación no implica causalidad…

Técnicas de regresión

Coeficiente de correlación

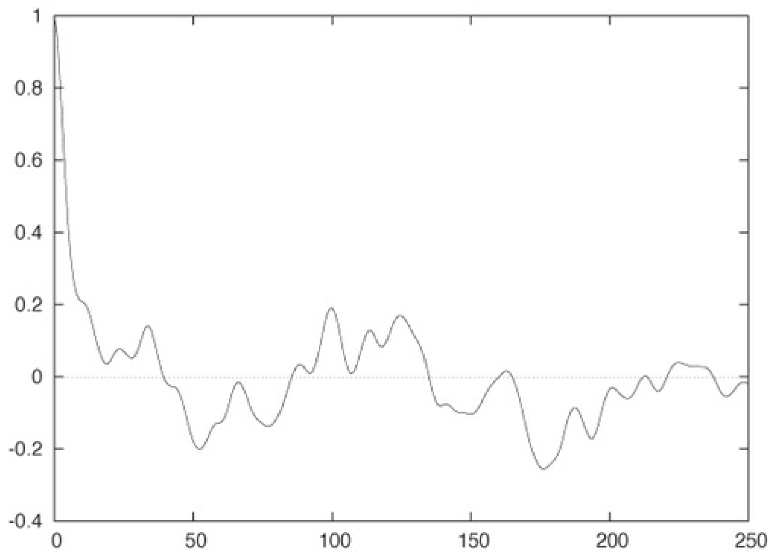


"Correlation is not causation but it sure is a hint."
-- Edward Tufte

Función de autocorrelación

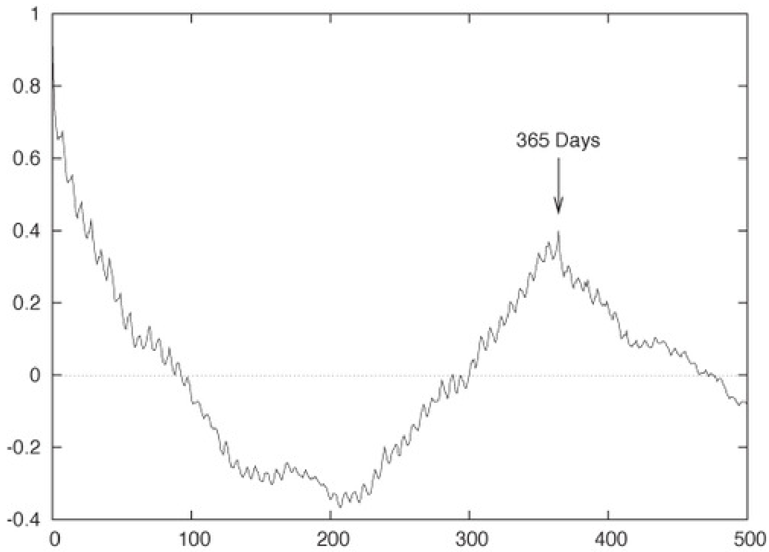
$$c(k) = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \mu)(x_{i+k} - \mu)}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2} \quad con \quad \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Función de autocorrelación



Autocorrelación para la salida de gas de una caldera

Función de autocorrelación

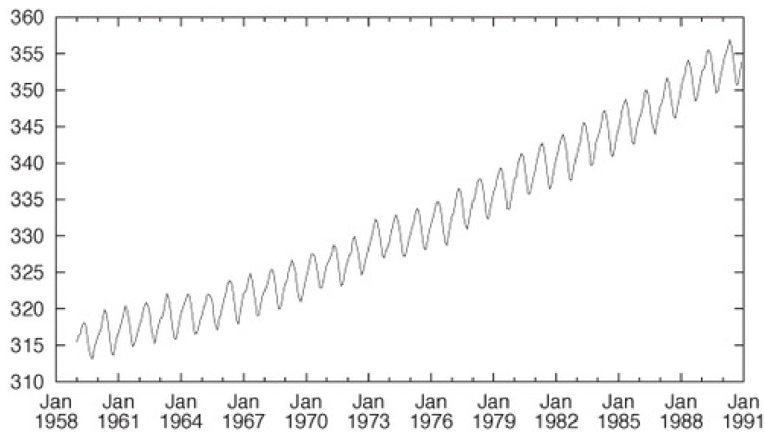


Autocorrelación en las llamadas a un call-center

Caso práctico

Conjunto de datos

Mediciones de CO_2 en Mauna Loa (Hawaii)

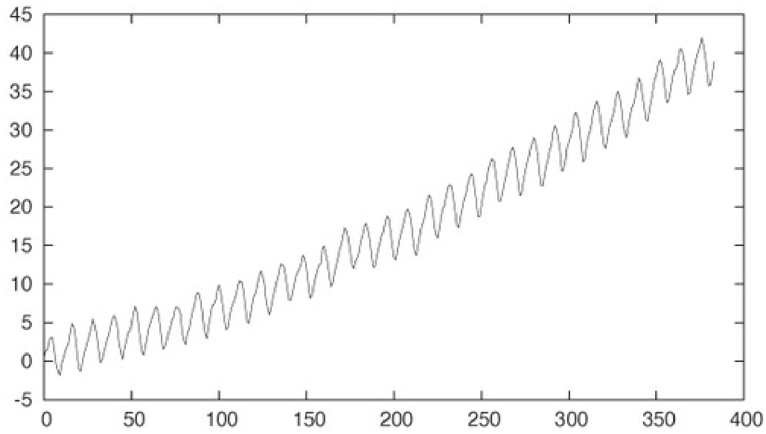


Adaptado de Philipp K. Jannert:

"Intermezzo: A Data Analysis Session" [capítulo 6]

Caso práctico

A partir de las mediciones mensuales (1959-1991), eliminamos las fechas del eje X
y hacemos que la serie empiece de cero:

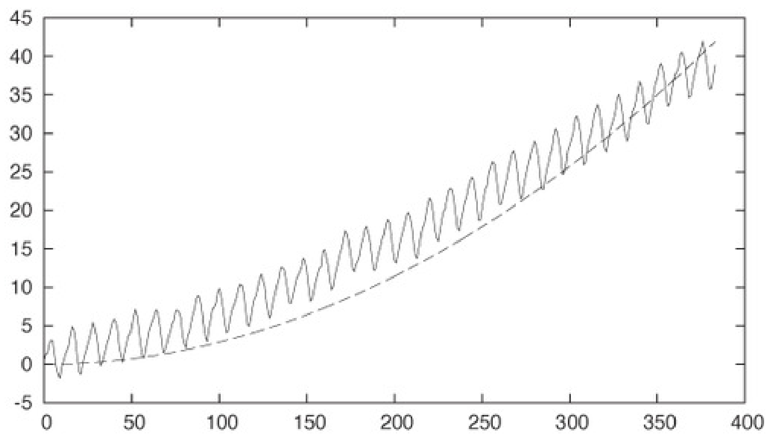


Caso práctico

Tendencia: Apreciamos una tendencia no lineal:

Intentamos ajustarla con una función de la forma x^k

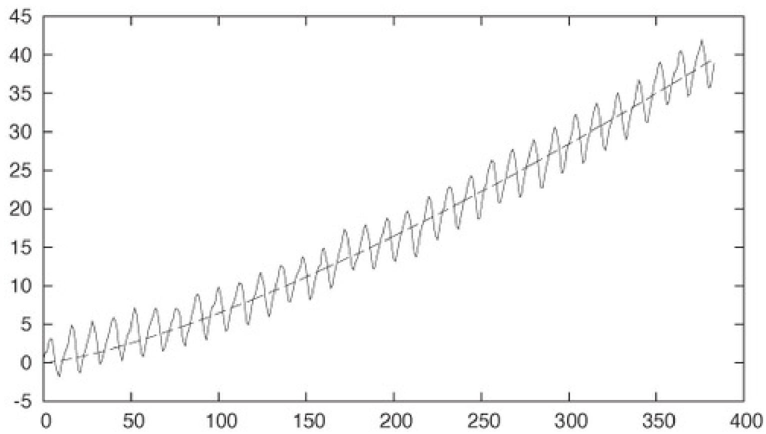
Nota: Todas las curvas de ese tipo pasan por (0,0) y (1,1)



Con k=2, tenemos 35*(x/350)^2, pero parece que nos hemos pasado…

Caso práctico

Afinamos un poco más y usamos un valor menor:



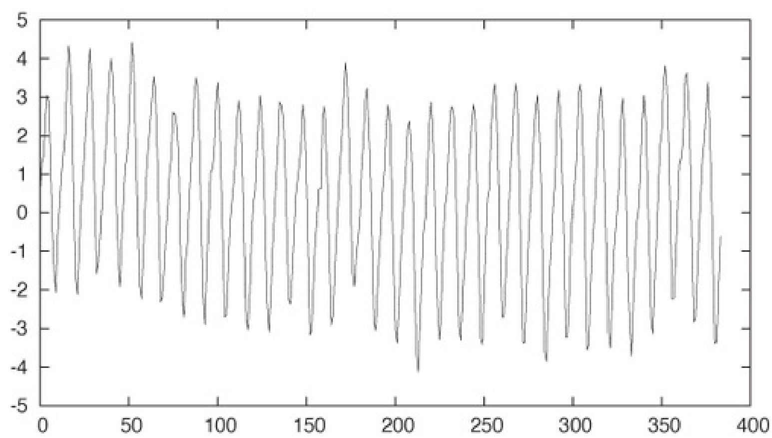
OK!

k=1.35

Ajuste de la función f(x) = 35*(x/350)^1.35

Caso práctico

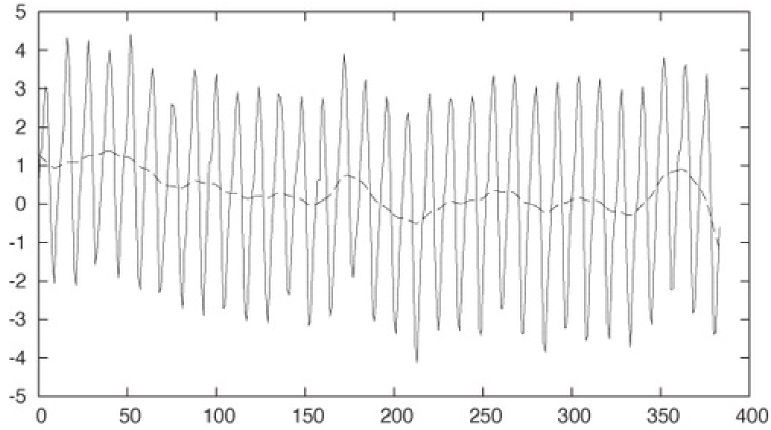
Para comprobar que no vamos mal,
calculamos los residuos (valor original – aproximación):



Residuos del ajuste f(x) = 35*(x/350)^1.35

Caso práctico

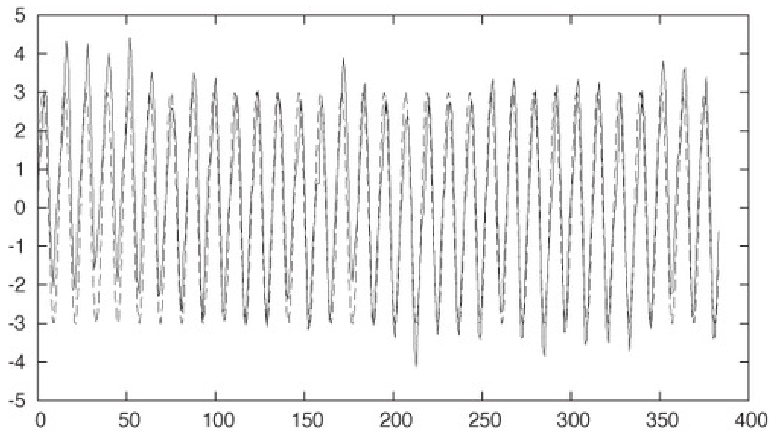
Si nuestro ajuste de la tendencia es correcto, los residuos no deben exhibir tendencia alguna (deberían aparecer balanceados en torno a y=0):



Suavizamos los residuos para comprobar si aún existe algún tipo de tendencia en los residuos…

Caso práctico

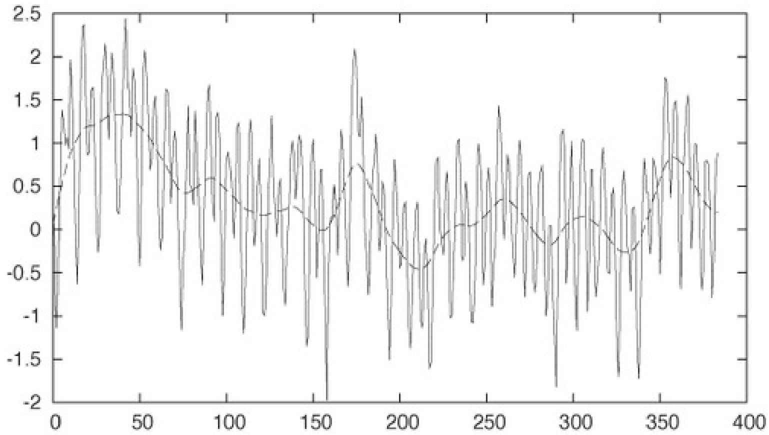
Estacionalidad:
Apreciamos una periodicidad anual (cada 12 valores)



Ajustamos con una función senoidad 3*sin(2*pi*x/12)

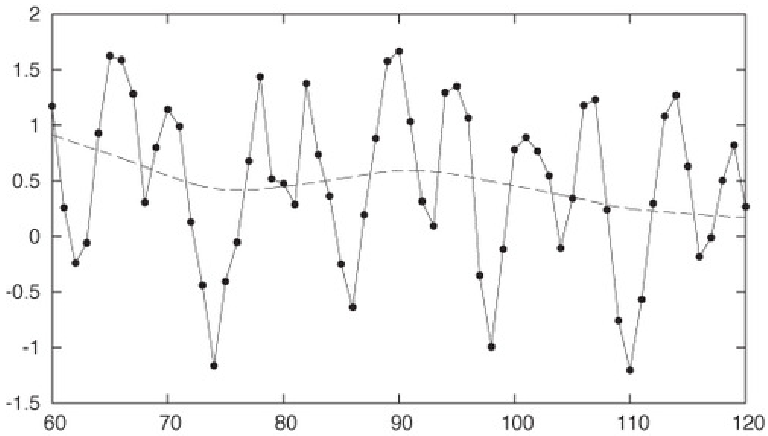
Caso práctico

Calculamos los residuos tras nuestras aproximaciones (valor original – tendencia – estacionalidad)



Caso práctico

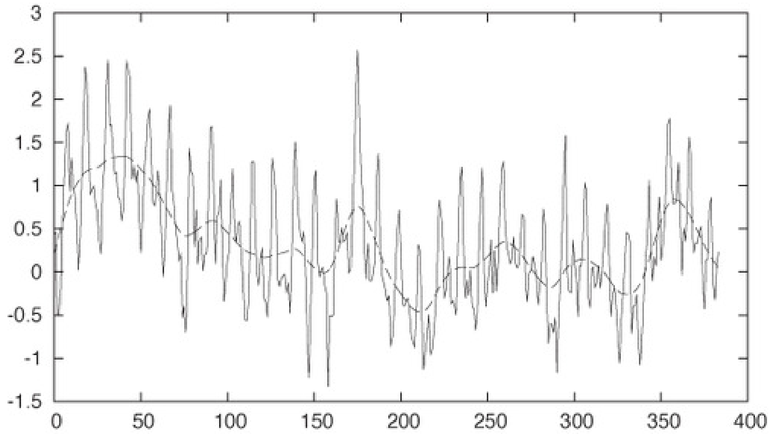
En la figura anterior no se ve mucho… hacemos zoom:



Se sigue apreciando cierta periodicidad, por lo que usamos un segundo armónico -0.75*sin(2*pi*x/6)

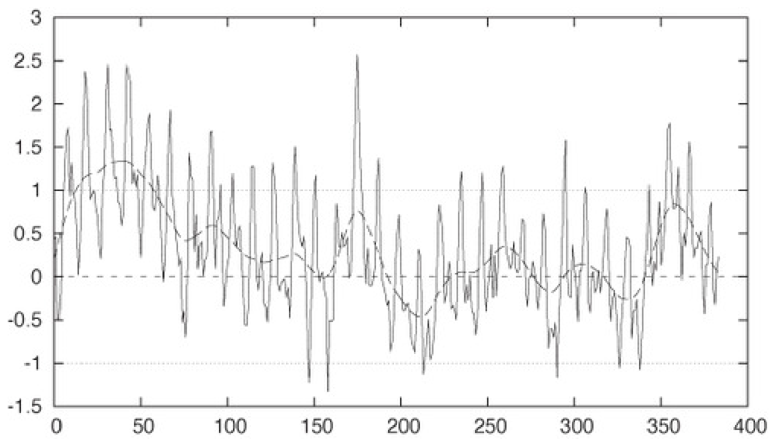
Caso práctico

Residuos tras eliminar la tendencia y los dos primeros armónicos correspondientes a la estacionalidad:



Caso práctico

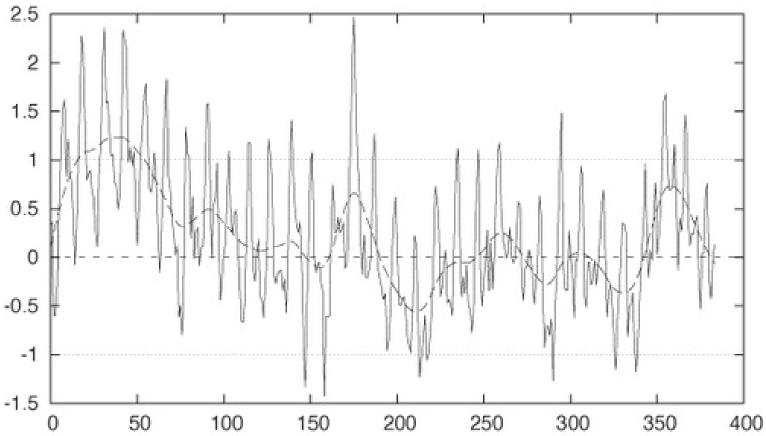
Añadimos líneas que nos ayuden a ver si los residuos están sesgados:



Parece sesgado hacia arriba,
por lo que añadimos un desplazamiento de +0.1

Caso práctico

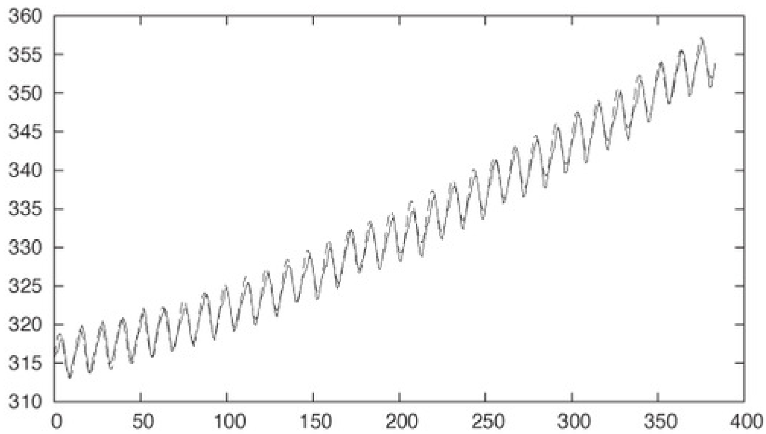
Los residuos de nuestra aproximación final:



f(x) = 315 + 35*(x/350)**1.35
+ 3*sin(2*pi*x/12) – 0.75*sin(2*pi*x/6)
+ 0.1

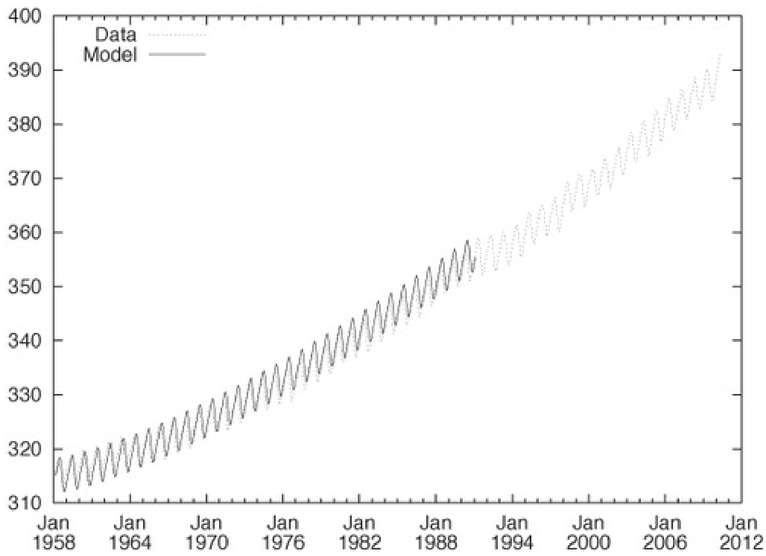
Caso práctico

El ajuste que hemos realizado (1959-1990):



Caso práctico

Nuestra predicción del futuro (1991-2010)



Predicción de series temporales

Predicción de series temporales

Forecasting

http://en.wikipedia.org/wiki/Forecasting

Modelos estadísticos

Modelos autorregresivos

AR(p)

Modelo autorregresivo de orden p:

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

- AR(0): Sin parámetros, sólo error
- AR(1): Un único parámetro φ_1(positivo)
- AR(2): Dos parámetros φ_1(positivo) y φ_2

Modelos estadísticos

Medias móviles

MA(q)

Modelo de medias móviles de orden q:

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

Modelos estadísticos

Autorregresión (AR) + Medias móviles (MA)

ARMA(p,q)

Con p términos autorregresivos y q medias móviles:

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

Peter Whittle: "Hypothesis testing in time series analysis," Ph.D. thesis, Uppsala, Sweden, 1951

Modelos estadísticos

Cuando la media no es estacionaria…

ARIMA(p,d,q)
autoregressive integrated moving average

Se añaden d pasos de diferenciación ("integración") para eliminar la tendencia de la serie (media no estacionaria):

- d=0: $X_t^* = X_t$
- d=1: $X_t^* = X_t - X_{t-1}$
- d=2: $X_t^* = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2})$

Y se aplica un modelo ARMA sobre X_t^*…

Modelos estadísticos

Cuando la media no es estacionaria…

ARIMA(p,d,q)
autoregressive integrated moving average

$$X_t = -\left(\Delta^d X_t - X_t\right) + \varphi_0 + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \Delta^d X_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

donde

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

George E.P. Box & Gwilym Jenkins: "*Time Series Analysis: Forecasting and Control*," 2nd ed., Holden-Day, 1976

Modelos estadísticos

Cuando la media no es estacionaria…

ARIMA(p,d,q)
autoregressive integrated moving average

- ARIMA(1,0,0) = AR(1)
- ARIMA(0,1,0) = I(1) = Random walk (paseo aleatorio)
- ARIMA(0,0,1) = MA(1)
- ARIMA(0,1,2) = Damped Holt's model
- ARIMA(0,1,1) = Suavizado exponencial básico
- ARIMA(0,2,2) = Suavizado exponencial doble, a.k.a. Método lineal de Holt con errores aditivos.

Modelos estadísticos

ARIMA estacional
SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)m
Seasonal autoregressive integrated moving average

- (p,d,q) Parte no estacional
- (P,D,Q) Parte estacional
  P términos AR estacionales
  D diferencias estacionales
  Q términos MA estacionales
- m Observaciones por año

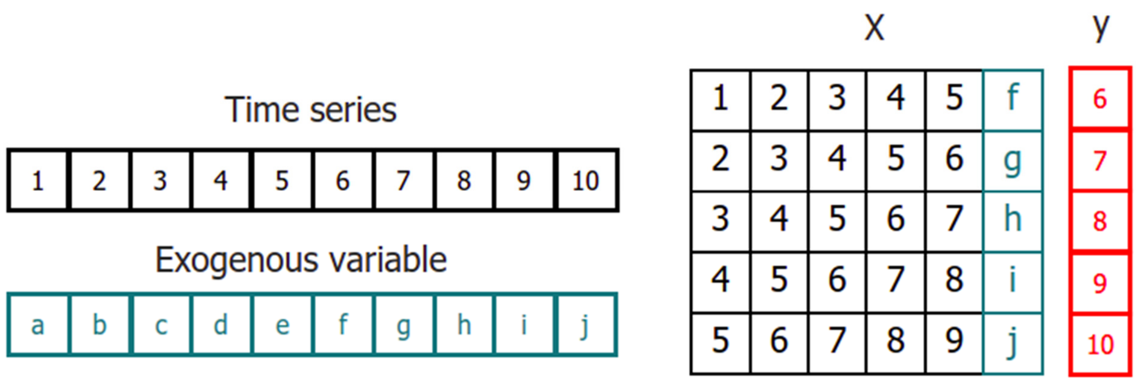
p.ej.
SARIMA(1,0,1)(2,1,0)12 $y_t - y_{t-12} = W_t$

$$W_t = \mu + \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-12} + \phi_3 W_{t-24} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Modelos estadísticos

Con variables exógenas

SARIMAX
Seasonal Autoregressive Integrated Moving-Average with eXogenous regressors



https://cienciadedatos.net/
https://doi.org/10.5281/zenodo.8382788

Modelos estadísticos

Extensiones vectoriales,
para predecir series temporales multivariable
(i.e. múltiples series temporales relacionadas):

- VAR [Vector AutoRegressive]
- VMA [Vector Moving Average]
- VARMA [Vector ARMA]
- VARIMA [Vector ARIMA]
- …

p.ej. Econometría

Modelos estadísticos

Cuando la varianza del error no es estacionaria
pero se asume que sigue un modelo autorregresivo (AR):

ARCH(q)
AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity

$$\varepsilon_t = \sigma_t \, z_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

Robert F. Engle: "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation," Econometrica, 50(4):987–1007, 1982

Modelos estadísticos

Cuando la varianza del error no es estacionaria
pero se asume que sigue un modelo ARMA:

GARCH(p,q)
Generalized ARCH

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

Tim Bollerslev: "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," Journal of Econometrics 31(3): 307–327, 1986

Modelos estadísticos

Los modelos ARCH/GARCH proporcionan una buena descripción de dos características de las series temporales en finanzas:

- Volatilidad cambiante en el tiempo
- Distribuciones leptocúrticas (colas más gruesas que en una distribución normal)

Sin embargo, la descripción de la varianza en términos de cuadrados no tiene en cuenta el signo de los cambios, cuando se ha observado que existen asimetrías en la correlación entre la volatilidad actual y los valores pasados de una serie (shocks positivos/negativos), p.ej. en los retornos de activos financieros.

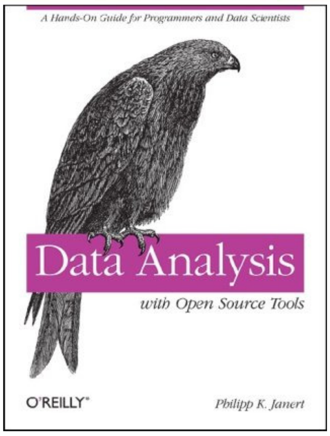
Modelos estadísticos

Variantes que rompen la simetría de GARCH:

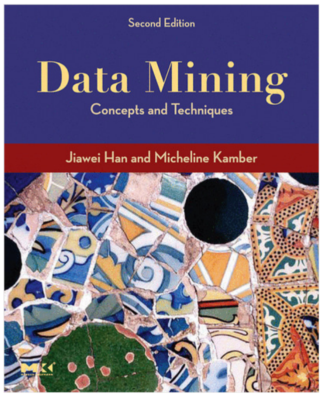
- **EGARCH** [Exponential GARCH]
  Daniel B. Nelson: "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," Econometrica, 59(2):347–370, 1991
- **QGARCH** [Quadratic GARCH]
  Enrique Sentana: "Quadratic ARCH Models," Review of Economic Studies, 62(4):639-661, 1995
- **TGARCH** [Threshold GARCH]
  Jean-Michel Zakoian: "Threshold heteroskedastic models," Journal of Economic Dynamics and Control, 18(5):931-955, 1994
- …

Bibliografía

- Philipp K. Janert:
  Data Analysis
  with Open Source Tools
  O'Reilly, 2010.
  ISBN 0596802358
  Part I - Graphics: Looking at Data



- Jiawei Han
  & Micheline Kamber:
  Data Mining:
  Concepts and Techniques
  2nd edition, Morgan Kaufmann, 2006.
  ISBN 1558609016
  8.2 Mining Time-Series Data



Bibliografía

- Kenneth J. Winston:
  Quantitative Risk and
  Portfolio Management:
  Theory and Practice
  Cambridge University Press, 2023
  ISBN 1009209043
  https://doi.org/10.1017/9781009209090